問題

$\boxed{\textbf{1}}$

　0 でない実数 a, b, c は次の条件 (i) と (ii) を満たしながら動くものとする。
(i) $1 + c^2 \leq 2a$
(ii) 2 つの放物線 $C_1 : y = ax^2$ と $C_2 : y = b(x-1)^2 + c$ は接している。
ただし、2 つの曲線が接するとは、ある共有点において共通の接線をもつことであり、その共有点を接点という。

(1) C_1 と C_2 の接点の座標を a と c を用いて表せ。

(2) C_1 と C_2 の接点が動く範囲を求め、その範囲を図示せよ。

$\boxed{\textbf{2}}$

　$n^3 - 7n + 9$ が素数となるような整数 n をすべて求めよ。

$\boxed{\textbf{3}}$

　α は $0 < \alpha \leq \dfrac{\pi}{2}$ を満たす定数とし、四角形 ABCD に関する次の 2 つの条件を考える。
(i) 四角形 ABCD は半径 1 の円に内接する。
(ii)$\angle \mathrm{ABC} = \angle \mathrm{DAB} = \alpha$
条件 (i) と (ii) を満たす四角形のなかで、4 辺の長さの積
$k = \mathrm{AB} \cdot \mathrm{BC} \cdot \mathrm{CD} \cdot \mathrm{DA}$
が最大となるものについて、k の値を求めよ。

$\boxed{\textbf{4}}$

　コインを n 回投げて複素数 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ を次のように定める。

(i) 1 回目に表が出れば $z_1 = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ とし、裏が出れば $z_1 = 1$ とする。

(ii) $k = 2, 3, \cdots, n$ のとき、k 回目に表が出れば $z_k = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2} z_{k-1}$ とし、裏が出れば $z_k = \overline{z_{k-1}}$ とする。($\overline{z_{k-1}}$ は z_{k-1} の共役複素数)

このとき $z_n = 1$ となる確率を求めよ。

$\boxed{5}$

曲線 $y=\log x$ 上の点 A$(t,\log t)$ における法線上に、点 B を AB=1 となるようにとる。ただし B の x 座標は t より大きいとする。

(1) 点 B の座標 $(u(t),v(t))$ を求めよ。また $\left(\dfrac{du}{dt},\dfrac{dv}{dt}\right)$ を求めよ。

(2) 実数 r は $0<r<1$ を満たすとし、t が r から 1 まで動くときに点 A と点 B が描く曲線の長さをそれぞれ $L_1(r),L_2(r)$ とする。このとき、極限 $\lim_{r\to+0}(L_1(r)-L_2(r))$ を求めよ。

$\boxed{6}$

四面体 ABCD は AC=BD、AD=BC を満たすとし、辺 AB の中点を P、辺 CD の中点を Q とする。

(1) 辺 AB と線分 PQ は垂直であることを示せ。

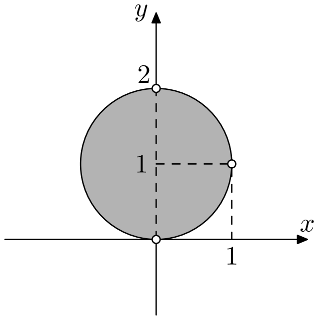
(2) 線分 PQ を含む平面 α で四面体 ABCD を切って 2 つの部分に分ける。このとき、2 つの部分の体積は等しいことを示せ。

解答

$\boxed{\mathbf{1}}$

(1) 接点の x 座標を s とすると
y 座標において $as^2 = b(s-1)^2 + c$
接線の傾きにおいて $2as = 2b(s-1)$ が成り立つ。
$a \neq 0$ より $s \neq 1$ であるので $b = \dfrac{as}{s-1}$ が成り立つことから
y 座標の等式に代入すると $as^2 = as(s-1) + c$ が成り立つ。
これを整理すると $s = \dfrac{c}{a}$ となるので接点の座標は $\underline{\left(\dfrac{c}{a}, \dfrac{c^2}{a}\right)}$ とわかる。

(2) 接点の座標を (X, Y) と表すと $c = \dfrac{Y}{X}, a = \dfrac{Y}{X^2}$ と表せるので (i) の条件は
$1 + \left(\dfrac{Y}{X}\right)^2 \leq \dfrac{2Y}{X^2}$ と表せる。
この分母をはらって整理すると $X^2 + Y^2 - 2Y \leq 0$ であるから
$X^2 + (Y-1)^2 \leq 1$ がわかる。
(ii) の条件は $a \neq c, b = \dfrac{ac}{a-c}$ と表せるので特に $a \neq c$ より $X \neq 1$ である。したがってさらに $X \neq 0$ より接点の範囲は下図とその境界から y 軸と点 (1,1) を除いた部分となる。

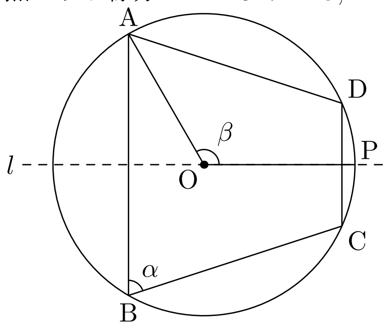


$\boxed{\mathbf{2}}$

　k を整数とし、n を 3 で割った余りで分類する。
$n=3k$ のとき $n^3-7n+9=27k^3-21k+9=3(9k^3-7k+3)$,
$n=3k+1$ のとき $n^3-7n+9=27k^3+27k^2-12k+3=3(9k^3+9k^2-4k+1)$,
$n=3k+2$ のとき $n^3-7n+9=27k^3+54k^2+15k+3=3(9k^3+18k^2+5k+1)$
であるので
すべての整数について n^3-7n+9 は 3 で割り切れる。
したがってこの値が素数になる場合、考えられる値は 3 のみであることがわかるので
$n^3-7n+9=3$ を解けばよい。
$n^3-7n+6=(n-1)(n-2)(n+3)=0$ より、求める値は、$\underline{n=1,2,-3}$

$\boxed{\mathbf{3}}$

線分 AB の垂直二等分線を l、四角形が内接する円の中心を O、l と円の交点のうち線分 AB からみて C,D と同じ側にある点を P とおく。



$\angle\mathrm{POA} = \beta$ とすると、$0 < \beta < \pi$ において考えることになる。
また ABCD が円に内接することから円周角の定理を利用すると
$\angle\mathrm{BOD}{=}2\angle\mathrm{BAD} = 2\alpha, \angle\mathrm{COA} = 2\angle\mathrm{CBA} = 2\alpha$ がわかる。
したがって $2\alpha < 2\beta < \angle\mathrm{BOD} + \angle\mathrm{COA} = 4\alpha$ がわかり、
$\angle\mathrm{COD} = 4\alpha - 2\beta, \angle\mathrm{BOC} = \beta - \dfrac{1}{2}\angle\mathrm{COD} = 2\beta - 2\alpha$ であるので
$\mathrm{AB} = 2\sin\beta, \mathrm{BC} = \mathrm{DA} = 2\sin(\beta-\alpha), \mathrm{CD} = 2\sin(2\alpha-\beta)$ となり、これより

$$\begin{aligned}
k &= 16\sin\beta\sin^2(\beta-\alpha)\sin(2\alpha-\beta)\\
&= 8\sin\beta(1-\cos(2\beta-2\alpha))\sin(2\alpha-\beta)\\
&= 4(\cos(2\beta-2\alpha)-\cos 2\alpha)(1-\cos(2\beta-2\alpha))\\
&= -4\cos^2(2\beta-2\alpha)+4(1+\cos 2\alpha)\cos(2\beta-2\alpha)-4\cos 2\alpha\\
&= (1+\cos 2\alpha)^2-4\cos 2\alpha-\{2\cos(2\beta-2\alpha)-(1+\cos 2\alpha)\}^2
\end{aligned}$$

となる。
$-1 \leq \cos 2\alpha < 1$ より $\cos 2\alpha < \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2} < 1$ であるから
$2\cos(2\beta-2\alpha) = 1+\cos 2\alpha$ となる β は $\alpha < \beta < 2\alpha$ の範囲に存在する。
したがって k の最大値は $(1+\cos 2\alpha)^2 - 4\cos 2\alpha = \underline{(1-\cos 2\alpha)^2}$

$\boxed{\mathbf{4}}$

まずすべての k について $z_k = 1, \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ であることを示す。
$k = 1$ のときは設定 (i) からわかる。
$k \geq 2$ において z_{k-1} がいずれかであったとする。
$z_{k-1} = 1$ のとき、表が出れば $z_k = \dfrac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$、裏が出れば $z_k = 1$ である。
$z_{k-1} = \dfrac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ のとき、表が出ても裏が出ても $z_k = \dfrac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$ となる。
$z_{k-1} = \dfrac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$ のとき、表が出れば $z_k = 1$、裏が出れば $z_k = \dfrac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ となる。
したがって帰納的にすべての k について $z_k = 1, \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ であることがわかったので
$z_k = 1$ となる確率を p_k、$z_k = \dfrac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ となる確率を q_k,$z_k = \dfrac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$ となる確率を r_k とおくと
$p_1 = q_1 = \dfrac{1}{2}, r_1 = 0, p_k + q_k + r_k = 1,$
$k \geq 2$ のとき $p_k = \dfrac{1}{2}p_{k-1} + \dfrac{1}{2}r_{k-1}, q_k = \dfrac{1}{2}p_{k-1} + \dfrac{1}{2}r_{k-1}, r_k = q_{k-1}$ となる。
したがって $q_k = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}q_{k-1}$ より $q_k - \dfrac{1}{3} = -\dfrac{1}{2}\left(q_{k-1} - \dfrac{1}{3}\right)$ がわかるので、
$q_k = \dfrac{1}{3}\left\{1 - \dfrac{1}{(-2)^k}\right\}$ となる。
したがって $p_n = q_n = \underline{\dfrac{1}{3}\left\{1 - \dfrac{1}{(-2)^n}\right\}}$

$\boxed{\mathbf{5}}$

(1) A における法線の式は $y=-\dfrac{1}{\frac{1}{t}}(x-t)+\log t$ より $y=-tx+t^2+\log t$ となる。

したがって $v(t)=-tu(t)+t^2+\log t$ と表せ、これより

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}^2 &= \{u(t)-t\}^2+\{v(t)-\log t\}^2\\ &= \{u(t)-t\}^2+\left\{t^2-tu(t)\right\}^2=(1+t^2)\{u(t)-t\}^2\end{aligned}$$

がわかる。したがって $u(t)>t$、AB=1 より $u(t)-t=\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ がわかるので、

B の座標 $(u(t),v(t))$ は $\underline{\left(t+\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}},\log t-\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)}$ とわかる。

また $\left(\dfrac{du}{dt},\dfrac{dv}{dt}\right)=\underline{\left(1-\dfrac{t}{(\sqrt{1+t^2})^3},\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{(\sqrt{1+t^2})^3}\right)}$ となる。

(2)

$$L_1(r) = \int_r^1\sqrt{1+\left(\frac{1}{t}\right)^2}dt=\int_r^1\frac{\sqrt{1+t^2}}{t}dt$$

であり、

$$\begin{aligned}L_2(r) &= \int_r^1\sqrt{\left(\frac{du}{dt}\right)^2+\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}dt\\ &= \int_r^1\sqrt{\left(1-\frac{t}{(\sqrt{1+t^2})^3}\right)^2+\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{(\sqrt{1+t^2})^3}\right)^2}dt\\ &= \int_r^1\sqrt{1+t^2}\cdot\left|\frac{1}{t}-\frac{1}{(\sqrt{1+t^2})^3}\right|dt\end{aligned}$$

である。

ここで $\sqrt{1+t^2}>1$ なので $0<t<1$ において $\dfrac{du}{dt}>1-t>0$ がわかり、したがって $\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{(\sqrt{1+t^2})^3}>0$ もわかる。

したがって

$$\begin{aligned}L_1(r)-L_2(r) &= \int_r^1\frac{\sqrt{1+t^2}}{t}dt-\int_r^1\sqrt{1+t^2}\cdot\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{(\sqrt{1+t^2})^3}\right)dt\\ &= \int_r^1\frac{1}{1+t^2}dt\end{aligned}$$

となるので $r=\tan\alpha$ と置換すると

$L_1(r)-L_2(r)=\int_\alpha^{\frac{\pi}{4}}d\theta=[\theta]_\alpha^{\frac{\pi}{4}}=\dfrac{\pi}{4}-\alpha$ となる。

したがって $r\to+0$ のとき $\alpha\to+0$ となるので

$\lim_{r\to+0}(L_1(r)-L_2(r))=\underline{\dfrac{\pi}{4}}$

$\boxed{\mathbf{6}}$

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b},\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c},\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d}$ とおく。このとき $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{1}{2}\vec{b},\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\dfrac{1}{2}(\vec{c}+\vec{d})$ がわかる。

また AC=BD から $|\vec{c}|=|\vec{d}-\vec{b}|$、AD=BC から $|\vec{d}|=|\vec{c}-\vec{b}|$ がわかるので、それぞれを 2 乗して内積の形式に整理すると

$|\vec{c}|^2=|\vec{d}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{d},|\vec{d}|^2=|\vec{c}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}$ となる。

したがって $\vec{b}\cdot\vec{c}=\dfrac{1}{2}\left(|\vec{c}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{d}|^2\right),\vec{b}\cdot\vec{d}=\dfrac{1}{2}\left(|\vec{d}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{c}|^2\right)$ となるので

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}} &= \vec{b}\cdot\left(\frac{1}{2}\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{d}-\frac{1}{2}\vec{b}\right)=\frac{1}{2}\vec{b}\cdot\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{b}\cdot\vec{d}-\frac{1}{2}|\vec{b}|^2\\ &= \frac{1}{4}\left(|\vec{c}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{d}|^2\right)+\frac{1}{4}\left(|\vec{d}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{c}|^2\right)-\frac{1}{2}|\vec{b}|^2=0\end{aligned}$$

となり、AB と PQ が垂直であることがわかる。

(2) 同様に計算すると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{CD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}} &= (\vec{d}-\vec{c})\cdot\left(\frac{1}{2}\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{d}-\frac{1}{2}\vec{b}\right)=\frac{1}{2}\vec{b}\cdot\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{b}\cdot\vec{d}-\frac{1}{2}|\vec{c}|^2+\frac{1}{2}|\vec{d}|^2\\ &= \frac{1}{4}\left(|\vec{c}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{d}|^2\right)-\frac{1}{4}\left(|\vec{d}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{c}|^2\right)-\frac{1}{2}|\vec{c}|^2+\frac{1}{2}|\vec{d}|^2=0\end{aligned}$$

であるので、CD と PQ も垂直であることがわかる。

したがって直線 PQ に R で直交する面上の点 E は媒介変数 s,t を用いて

$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\overrightarrow{\mathrm{AR}}+s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ と表せる。$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=u\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \left(\frac{1}{2}+s-\frac{1}{2}u\right)\vec{b}+\left(\frac{1}{2}u-t\right)\vec{c}+\left(\frac{1}{2}u+t\right)\vec{d}$$

となる。E が四面体に含まれるとき

$0\leq\dfrac{1}{2}+s-\dfrac{1}{2}u,0\leq t+\dfrac{1}{2}u,0\leq\dfrac{1}{2}u-t,0\leq\dfrac{1}{2}+s+\dfrac{1}{2}u\leq 1$ となる。

これより $\dfrac{1}{2}u-\dfrac{1}{2}\leq s\leq\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}u,-\dfrac{1}{2}u\leq t\leq\dfrac{1}{2}u$ となるので、

位置ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AR}}+s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ が四面体に含まれることと

位置ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AR}}-s\overrightarrow{\mathrm{AB}}-t\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ が四面体に含まれることは同値となる。

また α が PQ を通ることからこれらは α からみて異なる側に位置する。

これを利用すると R を通り PQ に垂直な平面における四面体の切り口は α によって合同な 2 図形に分割されることがわかり、全体の体積も等しくなることが示せる。

所感

$\boxed{\mathbf{1}}$

　単純そうな二次関数の問題です。
(1) は座標と微分係数の等式を使えばよいので標準的です。
(2) は接点の座標で条件を書き換えることになりますが注意しないと範囲外の点を入れてしまいます。接点の x 座標が 0,1 になりえないことは見落としやすいです。

$\boxed{\mathbf{2}}$

　京都大らしい、短くそれでいて解きがいのある整数問題です。
3 の倍数に着目できるかどうかが最大の分かれ目となるでしょう。
$n^3 - 7n + 9 = n(n+1)(n-1) + 3(3-2n)$ に気付くとすぐに導くことができます。
あとは方程式を解くだけですが n は負でも構わないことに注意しましょう。

$\boxed{\mathbf{3}}$

　変数設定のうまさがものをいう三角比の問題です。
どこの角度を使うかで難しさが変わってしまうかもしれません。
座標平面にもっていってもいいですが、当脚台形であることを利用して対称軸を基準にするとやりやすいでしょう。

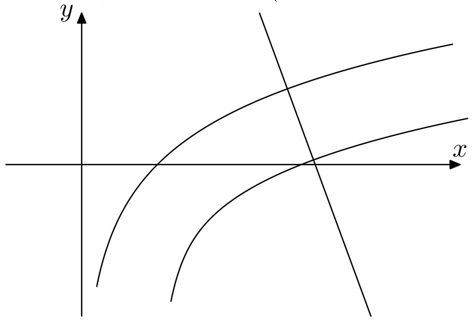
$\boxed{\mathbf{4}}$

　複素数平面に確率をもちこんだ問題です。
見た目は大変そうですが z_n がとりうる値は 3 通りしかないですのでそこを押さえてしまえば解きやすくなります。

$\boxed{\mathbf{5}}$

　法線を利用した微積分の問題です。
(1) は特に難しいこともなくいけると思います。
(2) も $\dfrac{1}{1+t^2}$ の積分方法を心得ているかぐらいしか差が出ないでしょう。

参考：A,B が描く曲線 (上側が A、下側が B が描く曲線)



$\boxed{\mathbf{6}}$

立体図形を用いた問題です。説明能力が問われる難問です。
(1) は今年の共通テストで見たような気がする内容です。この問題ではベクトルを使っています。
後のことも考えるとベクトルで解くのがよさそうですが幾何的に「三角形 ACD と三角形 BDC が合同」「したがって AQ=BQ なので三角形 AQB は二等辺三角形」「だから線分 PQ は AB に垂直」と解き進めることもできます。
(2) は (1) を利用せずに解く方法も存在する気がします。この解答では (1) から CD と PQ も垂直であることも示せる、ということに気付き PQ に垂直な平面の位置ベクトルは PQ との交点 R を基準に $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ を使って表せることを利用しています。
どのような方法でも、最終的に「切られた立体は PQ を軸に 180 度回転させると重なる」ということを示すことになります。